Τότε από γνωστή πρόταση

$$\lim_{\mu} \int_{A_\mu} f_\nu = \int_{\cup A_\mu} f_\nu = \int_A f_\nu .$$

και όμοια παίρνουμε από την άλλη μεριά:

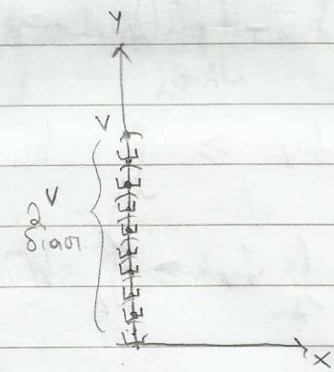
$$\lim_{\nu} \int_A f_\nu = \lim_{\nu} \lim_{\mu} \int_{A\cap B_\mu} f_\nu = \lim_{\nu} \lim_{\mu} \alpha_{\mu\nu} =$$

$$= \lim_{\mu} \lim_{\nu} \alpha_{\mu\nu} = \lim_{\mu} \int_A h_\mu$$

ΛΗΜΜΑ (ΒΑΣΙΚΟΤΑΤΟ)

Έστω $f\in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^n)$ τότε $\exists\, (\varphi_n)\uparrow$ απλών συναρτήσεων και μη αρνητικών : $f_\nu(x)=0$, αν $f(x)\geq \nu$, $\nu\in\mathbb{N}$ και $\varphi_n \xrightarrow{\sigma\eta\mu} \varphi$

Αποδ



$$\mathcal{M}^+(\mathbb{R}^n) = \{ f\in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) : f\geq 0 \}.$$

$\forall \nu\in\mathbb{N}$ $k\in \{0,1,2,\dots, \nu 2^\nu -1\}$

$A_{\nu,k} : \{ x : \frac{k}{2^\nu} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^\nu} \} \cap B(0,\nu)$

$$\varphi_\nu := \sum_{\lambda=1}^{\nu 2^\nu -1} \frac{\lambda}{2^n} \chi_{A_{\nu,\lambda}}$$

Έστω $x\in\mathbb{R}^n$, και $k=[2^\nu f(x)]$

i) $k > \nu 2^\nu -1 \Rightarrow k\notin \{0,1,\dots, \nu 2^\nu -1\} \Rightarrow \chi_{A_{\nu,k}}=0$

ii) $\nu \leq |x| \Rightarrow x\in B(0,\nu) \Rightarrow \chi_{A_{\nu,k}}=0$

iii) $k\leq \nu 2^\nu -1$, $\nu > |x|$ τότε $x\in B(0,\nu)$

$k \leq 2^\nu f(x) < k+1 \Rightarrow \frac{k}{2^\nu} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^\nu}$

Άρα, $x\in A_{\nu,k}$

$$\left[\frac{k}{2^\nu}, \frac{k+1}{2^\nu}\right) = \left[\frac{2k}{2^{\nu+1}}, \frac{2k+1}{2^{\nu+1}}\right) \cup \left[\frac{2k+1}{2^{\nu+1}}, \frac{2(k+1)}{2^{\nu+1}}\right)$$

Έτσι, $\left.\begin{array}{l} \varphi_{\nu+1} = \dfrac{2k}{2^{\nu+1}} = \dfrac{k}{2^\nu} = f_\nu(x) \\ \varphi_{\nu+1} = \dfrac{2k+1}{2^{\nu+1}} > \dfrac{k}{2^\nu} = \nu(x) \end{array}\right\}$ $\varphi_{\nu+1}(x) \geq \varphi_\nu(x) \Rightarrow \varphi_\nu(x) \uparrow$

Μένει ν.δ.ο. $\varphi_n(x) \to f(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ και $x \in \mathbb{R}^d$

Σταθεροποιούμε ένα $x \in \mathbb{R}^d$ και παίρνουμε $\nu : |x| < \nu$ και $[f(x)] < \nu$

Τότε για $k = [2^\nu f(x)]$ έχουμε $k \leq 2^\nu f(x) < k+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{k}{2^\nu} \leq f(x) \leq \dfrac{k+1}{2^\nu} \Rightarrow x \in A_{\nu,k}$

Επίσης, $0 \leq f(x) - \varphi_\nu(x) = f(x) - \dfrac{k}{2^\nu} < \dfrac{k+1}{2^\nu} - \dfrac{k}{2^\nu} = \dfrac{1}{2^\nu} \to 0$

άρα $\varphi_\nu \xrightarrow{\text{ομ.}} f$.

ΟΡΙΣΜΟΣ

- Έστω $f \in \mathcal{M}^+(A)$ τότε ισχύει το λήμμα.

Τότε $\lim \int f_\nu \in \widetilde{\mathbb{R}}^*$ υπάρχει και λέγεται ολοκλήρωμα κατά Lebesgue

Δηλ. $\int f := \lim \int f_\nu \geq 0$.

ΟΡΙΣΜΟΣ

- Αν A μετρήσιμο τότε το κατά Lebesgue ολοκλήρωμα στο A είναι $\int_A f := \int f \chi_A$.
- Αν $\int_A f < \infty$ τότε η f λέγεται ολοκληρώσιμη κατά Lebesgue πάνω στο A και γράφουμε $f \in \mathcal{L}^+(A)$

Πρόταση 1

Για κάθε $f, g \in \mathcal{M}^+(A)$ και $\alpha, \beta \geq 0$ ισχύει $\alpha f + \beta g \in \mathcal{M}^+(A)$ και $\int_A (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_A f + \beta \int_A g$

Προταση 2

Εστω $f, g \in m^{+}(A)$ τοτε $f<g \Rightarrow \int_A f \leq \int_A g$

Προταση 3

Εστω $f \in m^{+}(\mathbb{R})$ τοτε για A, B μετρήσιμα με $A \subseteq B \Rightarrow \int_A f \leq \int_B f$.

Προταση 4

Εστω $f \in m^{+}(A)$ και (A_μ) μια διαμέριση μετρήσιμων υποσυνόλων του A. Τοτε $\int_A f = \Sigma \int_{A_\mu} f$

Προταση 5

Εστω $f \in \mathcal{L}^{+}(A)$ και μια αύξουσα ακολουθία μετρήσιμων υποσυνόλων του A τ/ω $\cup A_v = A$ Τοτε $\int_A f = \lim \int_{A_v} f$

Προταση 6

Εστω $f \in \mathcal{L}^{+}(A)$ και $\forall v \in \mathbb{N}$ θετουμε $A_v = A \cap f^{-1}(v, +\infty)$ τοτε $\lim \int_{A_v} f = 0$

Προταση 7

Εστω $f \in \mathcal{L}^{+}(A)$ και (A_v) ακολουθία μετρήσιμων τ/ω $\lim V(A_v) = 0$ τοτε $\lim \int_{A_v} f = 0$

Αποδείξεις

4. Εστω $f \in m^{+}(A)$ τοτε θα ισχυει το βασικο λήμμα

Θεωρουμε,

$$\alpha_{k,v} := \sum_{v=1}^{k} \int_{A_v} f_v \quad \uparrow \text{ ως προς } k \text{ και } v$$

Τοτε, $\lim_k \lim_v \alpha_{k,v} = \lim_v \lim_k \alpha_{k,v}$

$$\int_A f := \lim_v \int_A f_v = \lim_v \sum_{\mu=1}^{\infty} \int_{A_\mu} f_v = \lim_v \lim_k \sum_{\mu=1}^{k} \int_{A_\mu} f_v =$$

$$= \lim_{k} \lim_{\nu} \sum_{\mu=}^{k} \int_{A_\mu} f_\nu = \sum_{\mu=1}^{\infty} \int_{A_\mu} f.$$

6. Έστω $f \in \mathcal{L}^+(A)$ τότε από το βασικό λήμμα $f_\nu(x)=0$ όταν $x \in A$. Για την ακολ f_μ.

$$\int_A f_\mu = \int_{A_\nu} f_\mu + \int_{A_\nu^c} f_\mu \geq \nu \cdot V(A_\nu) \longrightarrow 0.$$

7. Έστω $\varepsilon > 0$ τότε

$\forall \mu \in \mathbb{N}$: $B_\mu = A \cap f^{-1}(\mu, +\infty)$ τότε από την 6

$\exists k \in \mathbb{N}$ ώστε $\int_{B_k} f \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Αφού $\lim V(A_\nu) = 0 \Rightarrow \exists \nu_0 \in \mathbb{N} : \forall \nu \geq \nu_0$ με $V(A_\nu) \leq \frac{\varepsilon}{2k}$

Παίρνουμε,

$$0 \leq \int_{A_\nu} f = \int_{A_\nu \cap B_k \subseteq B_k} f + \int_{A_\nu - B_k} f \leq \int_{B_k} f + k \cdot V(A_\nu \setminus B_k)$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + k \cdot \frac{\varepsilon}{2k} = \varepsilon$$

Πρόταση

Αν $f \in m^+(A)$ τότε $\int_A f = 0 \Leftrightarrow f = 0$, a.e A

Απόδ

$\{\Rightarrow\}$: $\{x \in A : f(x) \neq 0\} = \{x \in A : f(x) > 0\} =$

$$= \bigcup_{\nu=1}^{\infty} \{x \in A : f(x) > \tfrac{1}{\nu}\}.$$

Θέτουμε το σύνολο

$A_\nu := \{x \in A : f(x) > \frac{1}{\nu}\}$

$$0 = \int_A f \geq \int_{A_\nu} f \geq \frac{1}{\nu} \cdot V(A_\nu) \geq 0 \Rightarrow V(A_\nu) = 0$$

$$V(\{x \in A : f(x) > 0\}) = V(\cup A_\nu) \leq \sum V(A_\nu) = 0.$$

$\{\Leftarrow\}$: $\exists B : V(B) = 0$ και $f(x) \neq g(x)$ $\forall x \in B$ και $f(x) = 0$, $\forall x \in A \setminus B$ τότε από το λήμμα.

$\nexists f_n : f_n(x) = 0 \quad , \forall x \in A \setminus B$ αύξουσα

$\int_A f_n = \lim_\nu \int_{A \setminus B} f_\nu + \int_B f_\nu = 0 .$

Άσκηση

Αν $f \in m(A)$ και $f = g$ α.e.A $\Rightarrow g \in m(A)$

ΛΥΣΗ

$$\{g > \sigma\} = \Big(\underbrace{\{g > \sigma\} \cap \{f = g\}}_{\text{μετρήσιμο}} \Big) \cup \Big(\underbrace{\{g > \sigma\} \cap \{f \neq g\}}_{\subseteq \{f \neq g\} \text{ μετρήσιμο}} \Big)$$

Άρα $g \in m(A)$

Πρόταση

Αν $f \in m^+(A)$, $g \geq 0$ $f = g$, α.e.A

i) $g \in m^+(A)$

ii) $\int_A f = \int_A g$

Απόδ

i) $E := \{f \neq g\}$, $V(E) = 0$

$\int_E f = 0 = \int_E g$

$$\int_A f = \int_{A \setminus E} f + \int_E f = \int_{A \setminus E} g + \int_E g = \int_A g$$

Πρόταση

Αν $A \in \mathcal{A}$ και $f_\nu \downarrow \in \mathcal{L}^+(A)$ και $f_\nu \to 0$ α.e.A

τότε $\lim_\nu \int_A f_\nu = 0$

Απόδειξη

Θεωρώ

$\Delta := \{x \in A : f_\nu \to 0\}$ έστω $V(A \setminus \Delta) = 0$

Θέτω $g_\nu := f_\nu \cdot \chi_\Delta = \begin{cases} f_\nu , & x \in \Delta \\ 0 , & x \notin \Delta \end{cases}$

Άρα $\lim_\nu g_\nu = 0$, $\forall x \in \Delta$

Έστω $\varepsilon > 0$.

$A_\mu : A \cap B(0,\mu)$, $\forall \mu \in \mathbb{N}$

Ακόμα ορίζουμε

$\Gamma_\nu := \{ x \in A_\mu : g_\nu(x) > \frac{\varepsilon}{2V(A_\mu)} \}$.

$g_\nu \in \mathcal{M}^+(A) \Rightarrow \Gamma_\nu \in \mathcal{A}$

$g_\nu \downarrow$ τότε $x \in \Gamma_{\nu+1} \Rightarrow g_{\nu+1}(x) > \frac{\varepsilon}{2V(A_\mu)} \Rightarrow$

$\Rightarrow g_\nu(x) \geq g_{\nu+1}(x) > \ldots \Rightarrow x \in \Gamma_\nu$.

Άρα, $\Gamma_\nu \downarrow$ και $\cap \Gamma_\nu = \emptyset$

$V(\Gamma_1) \subseteq V(A_\mu) \leq V(B(0,\mu)) < \infty$

$\Gamma_\nu \downarrow$ και $V(\Gamma_1) < \infty \Rightarrow \lim_\nu V(\Gamma_\nu) = V(\cap \Gamma_\nu) = V(\emptyset) = 0$

Τότε από πρόταση $(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall \nu \geq n_0) : \int_{\Gamma_\nu} g_\nu < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\int_{A_\mu} g_\nu = \int_{A_\mu \setminus \Gamma_\nu} g_\nu + \int_{\Gamma_\nu} g_\nu \leq \frac{\varepsilon}{2V(A_\mu)} \cdot V(A_\mu \setminus \Gamma_\nu) + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Συνεπώς, $\lim_\nu \int_{A_\mu} g_\nu = 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{N}$

Ορίζουμε,

$$\alpha_{\mu,\nu} := -\int_{A \setminus A_\mu} g_\nu \quad , \quad (\mu,\nu) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

άρα, $\alpha_{\mu,\nu}$ αύξουσα $\forall \nu$, μ δείκτη

Τότε, $\lim_\mu \lim_\nu \alpha_{\mu,\nu} = \lim_\nu \lim_\mu \alpha_{\mu,\nu}$

$$-\lim_\mu \lim_\nu \int_{A - A_\mu} g_\nu = \cancel{\lim_\mu \lim_\nu \int_{A_\mu} g_\nu} - \lim_\mu \lim_\nu \int_A g_\nu =$$

$$= -\lim_\nu \int_A g_\nu = \lim_\nu \left(\lim_\mu \int_{A_\mu} g_\nu - \lim_\mu \int_A g_\nu \right) \quad (1)$$

$\int_A g_\nu$

όπου $\cup A_\nu = A$ και $f_\nu \uparrow$

τότε $\lim \int_{A_\mu} f_\nu = \int_A f$

$$(1) = -\lim_\nu \left(\lim_\mu \int_{A_\mu} -g_\nu + \int_A g_\nu \right) = 0$$

άρα από προηγούμενη πρόταση

$\lim \int_A f_\nu = \lim \int_A g_\nu = 0$ αφού $f_\nu = g_\nu$, σε A $\forall \nu \in \mathbb{N}$